一般大久保型方程式とmiddle convolutionの拡張について (可積分系数理とその応用)

川上, 拓志

数理解析研究所講究録
第 1700 巻 2010 年 33-47

一般大久保型方程式と middle convolutionの拡張について

川上 拓志 (Hiroshi KAWAKAMI)

東大数理 (Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo)

1 はじめに

特異点が全て確定特異点であるような線型常微分方程式を Fuchs 型方程式と言う．各確定特異点においては，特性指数という複素数が対応して，これらが解の局所的な多価性を記述する．特異点の位置と，そこでの特性指数を並べた表をその Fuchs 型方程式の Riemann scheme と呼ぶ.

逆に，Riemann scheme を与えたとき，それによって方程式はどれくらい決まるかという問題を考えてみる．特異点の位置を固定したとき，与えることのできる特性指数の数と方程式のパラメータの数とを比べてみれば，大体においては Riemann scheme からは方程式は一意には決まらないことがわかる．つまり，一般には方程式のパラメータで特性指数とは無関係なものが存在するということである．このようなパラメータはアクセサリーパラメータと呼ばれる.

すると，アクセサリーパラメータを持たない方程式というのは，局所挙動を与えれば方程式が決まってしまうということだから，良い性質を持っていると考えられる．以下では,「アクセサリーパラメータを持たない」という性質を rigid と呼ぶことにする.

rigid な方程式の例として代表的なのは Gauss の超幾何微分方程式であるが，その解である超幾何関数が重要な数学的対象であることは言うまでもない．従って Gauss の超幾何関数のような良い特殊関数の仲間を手に入れたいと思ったとき，rigid な方程式を分類するというのは興味深い問題である.

rigid な方程式やその monodromy については大久保 [12] が詳細な研究を行ったが，その際，次のような標準形を考えた：

$$(xI_n - T)\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x} = A\Psi.$$

ここで T は対角行列，A は任意の行列である．従ってこれは Fuchs 型方程式である．このような形の方程式は大久保型方程式と呼ばれる．後で見るように，Fuchs 型方程式は大久保型に変換できるので（命題７参照），特別な形ではあるが，一般の方程式である.

横山 [16] は，大久保型方程式を大久保型に移す拡大と縮小という操作を定義し，次の定理を証明した．

定理 (Yokoyama)．任意の既約，*rigid* な半単純大久保型方程式は *1* 階の大久保型方程式に拡大と縮小を有限回施すことで得られる．

また，Katz [8] は addition と middle convolution という操作を導入し，次の定理を示した．

定理 (Katz)．任意の既約で *rigid* な *Fuchs* 型方程式は *1* 階の *Fuchs* 型方程式に *addition* と *middle convolution* を有限回施すことで得られる．

これらの定理によって，rigid な Fuchs 型方程式を全て手に入れることができるようになった．さらに，addition と middle convolution，拡大と縮小は解のレベルでも解析的な操作として実現できるので（例えば addition はべき関数による gauge 変換，middle convolution は本質的に Euler 変換である），1 階の方程式の解から出発して rigid な方程式が解の積分表示を持つこともわかる（[5]）．

ここで，Katz の操作について説明したいと思う．但し，以下の定義は Katz の操作を線型代数の言葉に翻訳した Dettweiler-Reiter [1] に依るものである．

次のような Fuchs 型方程式系

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{A_1}{x-t_1} + \cdots + \frac{A_p}{x-t_p}\right) Y$$

を考える．$A_1, \ldots, A_p$ は $m \times m$ 定数行列である．簡単のため，この節ではこのような方程式系を $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_p)$ と表すことにする．

定義 (addition)．$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{C}^p$ に対し，

$$\mathcal{A} \mapsto (A_1 + \alpha_1 I_m, \ldots, A_p + \alpha_p I_m)$$

を *addition* と呼ぶ．

λ を複素数とする．$pm \times pm$ 行列 G_ν を

$$G_\nu = \begin{pmatrix} O_m & & \cdots & & O_m \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ A_1 & \ldots & A_\nu + \lambda I_m & \ldots & A_p \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ O_m & & \cdots & & O_m \end{pmatrix} \quad (\nu = 1, \ldots, p).$$

と定める．

定義 (convolution)．Fuchs 型方程式系 $(G_1, \ldots, G_p)$ を $\mathcal{A}$ のパラメータ λ による *convolution* と呼ぶ．$c_\lambda(\mathcal{A})$ と表す．

$\mathcal{K}, \mathcal{L}_\lambda$ を $\mathbb{C}^{pm}$ の線型部分空間

$$\mathcal{K} := \begin{pmatrix} \mathrm{Ker}(A_1) \\ \vdots \\ \mathrm{Ker}(A_p) \end{pmatrix}, \qquad (1.1)$$
$$\mathcal{L}_\lambda := \mathrm{Ker}(G_1 + \cdots + G_p)$$

とする．これらは $G_1, \ldots, G_p$ 不変部分空間である．

$\bar{G}_\nu$ を G_ν によって引き起こされる $\mathbb{C}^{pm}/(\mathcal{K} + \mathcal{L}_\lambda)$ の線型変換とする．

定義 (middle convolution) ．$\mathcal{A} \mapsto (\bar{G}_1, \ldots, \bar{G}_p)$ をパラメータ λ の *middle convolution* と呼び，mc_λ と表す．

この定義からわかるように，addition は行列のサイズを変えないが，middle convolution は一般に変える（大きくなることも小さくなることもある．変わらないこともある）．実は後に述べるように，middle convolution は与えられた Fuchs 型方程式を大久保型方程式に変換することと関係している（命題 9 参照）ので，横山の理論においてのみならず，Katz の理論においても大久保型方程式が鍵を握っていると言える．

以上は Fuchs 型方程式に関する理論だが，特殊関数はいつも Fuchs 型方程式によって定義されるわけではない．従って我々は上の理論を不確定特異点を持つ方程式も扱えるように拡張したいと考える．最近，横山の操作が Katz の操作で書けることが大島 [14] によって明らかにされたので，Katz の理論を，従って middle convolution をどう拡張するべきかが問題となる．そのため，以下では与えられた不確定特異点型方程式を（一般化された意味での）大久保型方程式に変換すること，さらに不確定特異点型方程式に対する middle convolution をどう捉えたらよいかということを考えたい．

2 一般大久保型方程式

次のような線型常微分方程式系：

$$(xI_n - T)\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x} = A\Psi \qquad (2.1)$$

を大久保型方程式と呼ぶことは既に述べた．ここで T は $n \times n$ 対角行列，A は $n \times n$ の任意の行列であった．

$$T = \begin{pmatrix} t_1 I_{l_1} & & \\ & \ddots & \\ & & t_p I_{l_p} \end{pmatrix}$$

とすると，(2.1) は $x = t_1, \ldots, t_p$ と $x = \infty$ を確定特異点に持つ．

T が対角化可能でないとすると，(2.1) は一般に不確定特異点を持つ．T が対角でない Jordan 行列のとき，(2.1) を一般大久保型方程式と呼ぶことにする．

例 1. $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると，(2.1) は

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x} &= (xI - T)^{-1} A \Psi \\ &= \left\{ \frac{1}{x^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A + \frac{1}{x} A \right\} \Psi \end{aligned}$$

であるので，原点に不確定特異点を持つ．

以下では，A は対角化可能，すなわち

$$A = -GRG^{-1}, \; R = \mathrm{diag}(\rho_1, \ldots, \rho_m, 0, \ldots, 0) \quad (\rho_j \neq 0) \tag{2.2}$$

と書けるとする．従って (2.1) は次のようになる：

$$(xI - T)\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x} = -GRG^{-1}\Psi.$$

この方程式を (T, R, G) と表すこともある．

$\mathrm{Stab}(M)$ を $M \in M(n, \mathbb{C})$ の固定化部分群

$$\mathrm{Stab}(M) = \{ g \in GL(n, \mathbb{C}) \mid gMg^{-1} = M \}$$

とする．Jordan 行列 T と対角行列 $R = \mathrm{diag}(\rho_1, \ldots, \rho_m, 0, \ldots, 0)$ に対し，集合 $\mathcal{O}(T, R)$ を次で定める：

$$\mathcal{O}(T, R) := \{ (T, R, G) \} / \underset{\mathcal{O}}{\sim} .$$

ここで同値関係 $\underset{\mathcal{O}}{\sim}$ は $h \in \mathrm{Stab}(T)$, $g \in \mathrm{Stab}(R)$ に対し，

$$G \underset{\mathcal{O}}{\sim} hGg$$

で定義する．一般大久保型方程式の集合を

$$\mathcal{GO} := \coprod_{T,R} \mathcal{O}(T, R)$$

とする．ここで T は全ての Jordan 行列を走り（対角行列を含む），R は全ての (2.2) の形の対角行列を走る．同様に大久保型方程式の集合を

$$\mathcal{O} := \coprod_{T,R} \mathcal{O}(T, R)$$

とする．T は対角行列全体を走る．もちろん $\mathcal{O} \subset \mathcal{GO}$ である．

次に大久保型でない（普通の形の）方程式系を集めた集合を定義する．X_p を

$$X_p := \{(t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{C}^p \mid t_i \neq t_j \ (i \neq j)\}$$

とし，$\Gamma_{(m,p)}$ と $\Gamma^*_{(m,p)}$ を

$$\Gamma_{(m,p)} := X_p \times (\mathbb{Z}_{\geq 0})^p \times (\mathbb{C}^\times)^m,$$
$$\Gamma^*_{(m,p)} := X_p \times (\mathbb{C}^\times)^m$$

と定める．

$\Gamma^*_{(m,p)}$ を包含写像

$$\Gamma^*_{(m,p)} \hookrightarrow \Gamma_{(m,p)}$$
$$(t_1, \dots, t_p, \rho_1, \dots, \rho_m) \mapsto (t_1, \dots, t_p, \overbrace{0, \dots, 0}^{p}, \rho_1, \dots, \rho_m)$$

によって $\Gamma_{(m,p)}$ の部分集合とみなす．

$\Gamma_{(m,p)}$ の任意の元 $\gamma = (t_1, \dots, t_p, r_1, \dots, r_p, \rho_1, \dots, \rho_m)$ に対し $\tilde{R}_\gamma$ を $m \times m$ 対角行列 $\mathrm{diag}(\rho_1, \dots, \rho_m)$ とする．このとき $\mathcal{E}_\gamma$ を

$$\mathcal{E}_\gamma = \left\{ A(x) = \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{k=0}^{r_\nu} \frac{A_\nu^{(-k)}}{(x - t_\nu)^{k+1}} \;\middle|\; A_\nu^{(-k)} \in M(m, \mathbb{C}),\ A_\nu^{(-r_\nu)} \neq O,\ -\sum_{\nu=1}^{p} A_\nu^{(0)} = \tilde{R}_\gamma \right\} \Big/ \underset{\mathcal{E}_\gamma}{\sim}$$

によって定義する．ここで同値関係 $\underset{\mathcal{E}_\gamma}{\sim}$ は

$$A(x) \underset{\mathcal{E}_\gamma}{\sim} gA(x)g^{-1} \quad (g \in \mathrm{Stab}(\tilde{R}_\gamma))$$

とする．$\mathcal{E}_\gamma$ の元 $A(x)$ を方程式 $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = A(x)Y$ と同一視する．

今

$$\mathcal{E} := \coprod_{m,p \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} \coprod_{\gamma \in \Gamma_{(m,p)}} \mathcal{E}_\gamma,$$
$$\mathcal{F} := \coprod_{m,p \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} \coprod_{\gamma \in \Gamma^*_{(m,p)}} \mathcal{E}_\gamma$$

とおく．$\mathcal{E}$ は無限遠を確定特異点に持つ $\mathbb{P}^1$ 上の線型常微分方程式系の集合，$\mathcal{F}$ は $\mathbb{P}^1$ 上の Fuchs 型方程式系の集合である．確定特異点が 1 つでもあればそれを無限遠に移すと $\mathcal{E}$ に入るので，$\mathcal{E}$ は少なくとも 1 つ確定特異点を持つ方程式の集合と言うこともできる．

3 写像 $\pi : \mathcal{GO} \to \mathcal{E}$

この節では，写像 $\pi : \mathcal{GO} \to \mathcal{E}$ を定義する．
$J_k(a)$ を $k \times k$ Jordan ブロック

$$J_k(a) := aI_k + N_k \quad (a \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$$

とする．N_k は $k \times k$ のべき零行列：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

である．自然数の分割 $\lambda = (m_1, \dots, m_l)$ に対し，

$$J_\lambda(a) := J_{m_1}(a) \oplus \cdots \oplus J_{m_l}(a)$$

とおく．$[T, R, G]$ を $\mathcal{GO}$ の任意の元，すなわち

$$(xI - T)\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x} = -GRG^{-1}\Psi \tag{3.1}$$

とする．ここで T は Jordan 行列

$$T = J_{\lambda_1}(t_1) \oplus \cdots \oplus J_{\lambda_p}(t_p),$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_p$ は分割である．$n = |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_p|$ とする．また

$$R = \mathrm{diag}(\rho_1, \dots, \rho_m, 0, \dots, 0)$$
$$\tilde{R} = \mathrm{diag}(\rho_1, \dots, \rho_m)$$

とおく．(3.1) の未知関数を $\Psi = G\tilde{\Psi}$ と変換すると

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\Psi}}{\mathrm{d}x} = -G^{-1}(xI - T)^{-1}GR\tilde{\Psi} \tag{3.2}$$

を得る．右辺の係数は

$$-G^{-1}(xI - T)^{-1}GR = \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{k=0}^{m_{\nu,1}-1} \frac{B_\nu^{(-k)}}{(x - t_\nu)^{k+1}}$$

となる．但し，

$$B_\nu^{(-k)} := -G^{-1}J_\nu^{(-k)}GR$$

で，$J_\nu^{(-k)}$ は $(xI-T)^{-1}$ における $1/(x-t_\nu)^{k+1}$ の係数である．具体的には

$$J_\nu^{(-k)} = O_{|\lambda_1|+\cdots+|\lambda_{\nu-1}|} \oplus N^k_{m_{\nu,1}} \oplus \cdots \oplus N^k_{m_{\nu,l_\nu}} \oplus O_{|\lambda_{\nu+1}|+\cdots+|\lambda_p|}$$

と書ける．ここで $\lambda_\nu = (m_{\nu,1}, \ldots, m_{\nu,l_\nu})$ とおいた．R の最後の $n-m$ 列は 0 なので，$B_\nu^{(-k)}$ はある $m \times m$ 行列 $A_\nu^{(-k)}$ 行列と $(n-m)\times m$ 行列 $X_\nu^{(-k)}$ によって

$$B_\nu^{(-k)} = \begin{pmatrix} A_\nu^{(-k)} & O_{m,n-m} \\ X_\nu^{(-k)} & O_{n-m,n-m} \end{pmatrix}$$

と書ける．そこで $[T,R,G] \in \mathcal{GO}$ に対してその像を

$$\sum_{\nu=1}^{p} \sum_{k=0}^{m_{\nu,1}-1} \frac{A_\nu^{(-k)}}{(x-t_\nu)^{k+1}} \in \mathcal{E}$$

とする．

以上をまとめると，$[T,R,G] \in \mathcal{GO}$ に対し，

$$\pi(T,R,G) := (-G^{-1}(xI-T)^{-1}GR\,\text{の左上}\ m\times m\ \text{部分}) \quad \in \mathcal{E}$$

で定めるということである．これは well-defined である．

π による解の対応についても見ておく．Ψ を

$$(xI-T)\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x} = -GRG^{-1}\Psi$$

の解とする．そのとき (3.2) より，$\tilde{\Psi} = G^{-1}\Psi$ は次の方程式を満たす：

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\Psi}}{\mathrm{d}x} = \sum\sum \frac{B_\nu^{(-k)}}{(x-t_\nu)^{k+1}}\tilde{\Psi}.$$

$B_\nu^{(-k)}$ の形より

$$\psi = \begin{pmatrix} (\tilde{\Psi})_1 \\ \vdots \\ (\tilde{\Psi})_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (G^{-1}\Psi)_1 \\ \vdots \\ (G^{-1}\Psi)_m \end{pmatrix}$$

は $\pi(T,R,G)$ の解である．従って解のレベルでは，写像 π は

$$\Psi \mapsto \begin{pmatrix} (G^{-1}\Psi)_1 \\ \vdots \\ (G^{-1}\Psi)_m \end{pmatrix}$$

で与えられる．

4 π の全射性

$E=\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{k=0}^{r_\nu}\frac{A_\nu^{(-k)}}{(x-t_\nu)^{k+1}}$ を $\mathcal{E}$ のサイズ m の元とする．$\tilde{r}_\nu := m(r_\nu+1)$, $n := \sum_{\nu=1}^{p}\tilde{r}_\nu$ とおく．

$\tilde{A}_\nu$ を次のような $\tilde{r}_\nu\times n$ 行列とする：

$$\tilde{A}_\nu := \begin{pmatrix} & & & O_{mr_\nu,n} & & & \\ A_1^{(-r_1)} & \dots & A_1^{(0)} & \dots & A_p^{(-r_p)} & \dots & A_p^{(0)} \end{pmatrix}.$$

また，行列 $\tilde{A},T,P$ を

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix}\tilde{A}_1\\ \vdots \\ \tilde{A}_p\end{pmatrix},\ T := J_{r_1+1}(t_1)^{\oplus m}\oplus\cdots\oplus J_{r_p+1}(t_p)^{\oplus m},$$

$$P := P_{(m,r_1+1)}\oplus\cdots\oplus P_{(m,r_p+1)}$$

とする．$P_{(i,j)}$ は次のような置換行列

$$P_{(i,j)} = (I_i\otimes \boldsymbol{e}_1, I_i\otimes \boldsymbol{e}_2,\dots, I_i\otimes \boldsymbol{e}_j)$$

で，$\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_j$ は $\mathbb{C}^j$ の単位ベクトルである．

定義 2. 一般大久保型方程式

$$(xI_n-T)\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x} = (P\tilde{A}P^{-1}+\lambda I_n)\Psi$$

を E のパラメータ λ による convolution とよび，$c_\lambda(E)$ と表す．

定理 3. $\mathcal{E}$ の任意の元 E に対し，$c_0(E)$ は $\pi^{-1}(E)$ の元である．従って写像 $\pi : \mathcal{GO}\to\mathcal{E}$ は全射である．

注 4. Y を E：

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = \left(\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{k=0}^{r_\nu}\frac{A_\nu^{(-k)}}{(x-t_\nu)^{k+1}}\right)Y$$

の解とする．

$$F(x) = \begin{pmatrix}F_1(x)\\ \vdots\\ F_p(x)\end{pmatrix},\quad F_\nu(x) := \begin{pmatrix}\frac{Y(x)}{(x-t_\nu)^{r_\nu+1}}\\ \vdots \\ \frac{Y(x)}{x-t_\nu}\end{pmatrix}\quad (\nu=1,\dots,p)$$

とおくとき，適当な積分路 C に対して

$$Z(x) = P\int_C F(t)(x-t)^\lambda \mathrm{d}t$$

は $c_\lambda(E)$ の解となる．

注 5. もし方程式が確定特異点を1つも持たなくても，特異点以外の点 a を任意に選び，gauge 変換（addition）$Y \to (x-a)^{\alpha} Y$ で $\frac{\alpha I}{x-a}$ という項を付け加えることができるので，E が少なくとも1つ確定特異点を持つという要請は本質的ではない．

注 6. E の各特異点での leading term の係数行列 $A_{\nu}^{(-r_{\nu})} (\nu = 1, \dots, p)$ が全て正則のとき，$c_0(E)$ が $\pi^{-1}(E)$ の最小サイズの元を与える．

5 middle convolution との関係

次に，先程定義した写像 π を $\mathcal{O}$ に制限した $\pi|_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \to \mathcal{F}$ と middle convolution との関係について述べる．

$F = \left[\sum_{\nu=1}^{p} \frac{A_{\nu}^{(0)}}{x - t_{\nu}} \right]$ を $\mathcal{F}$ の size m の元とする．$\mathrm{rank} A_{\nu}^{(0)} = l_{\nu}$ とおく．このとき $A_{\nu}^{(0)}$ を $m \times l_{\nu}$ 行列 B_{ν} と $l_{\nu} \times m$ 行列 C_{ν} を用いて $A_{\nu}^{(0)} = B_{\nu} C_{\nu}$ と分解できる．$n = l_1 + \cdots + l_p$ とおく．

$n \times n$ 行列 $T_{\min}$，$A_{\min}$ を

$$T_{\min} = \begin{pmatrix} t_1 I_{l_1} & & \\ & \ddots & \\ & & t_p I_{l_p} \end{pmatrix}, \quad A_{\min} = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_p \end{pmatrix} (B_1 \dots B_p)$$

で定める．

命題 7. $\pi^{-1}(F)$ の中で最小サイズの大久保型方程式は一意的に存在し，次で与えられる：

$$(xI - T_{\min}) \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x} = A_{\min} \Psi. \tag{5.1}$$

特に，$\pi|_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \to \mathcal{F}$ は全射である．

例 8. $m = 2, p = 3$ のとき，$A_{\nu}^{(0)}$ の固有値をそれぞれ $0, \theta_{\nu}$ $(\nu = 1, 2, 3)$ とすると，$A_{\nu}^{(0)}$ を次のようにパラメトライズできる．

$$\begin{aligned} A_{\nu}^{(0)} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{\nu} b_{\nu} + \theta_{\nu} & -a_{\nu}^2 \\ b_{\nu}^2 - \frac{\theta_{\nu}^2}{a_{\nu}^2} & -a_{\nu} b_{\nu} + \theta_{\nu} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{\nu} \\ \frac{a_{\nu} b_{\nu} - \theta_{\nu}}{a_{\nu}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a_{\nu} b_{\nu} + \theta_{\nu}}{2 a_{\nu}} & -\frac{a_{\nu}}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

このとき $A_{\min}$ は

$$A_{\min}=\begin{pmatrix}\frac{a_1b_1+\theta_1}{2a_1} & -\frac{a_1}{2}\\ \frac{a_2b_2+\theta_2}{2a_2} & -\frac{a_2}{2}\\ \frac{a_3b_3+\theta_3}{2a_3} & -\frac{a_3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ \frac{a_1b_1-\theta_1}{a_1} & \frac{a_2b_2-\theta_2}{a_2} & \frac{a_3b_3-\theta_3}{a_3}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\theta_1 & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & 2\theta_2 & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & 2\theta_3\end{pmatrix}$$

となる．但し $c_{ij}=a_jb_i-a_ib_j+\theta_i\frac{a_j}{a_i}+\theta_j\frac{a_i}{a_j}$ である．

この $A_\nu^{(0)}$ と $A_{\min}$ との対応は [7], [11] にあるものと同じである．

命題 9. $F\in\mathcal{F}$ に対して，*(5.1)* で与えられるサイズが最小な大久保型方程式を O_F とする．また，大久保型方程式の右辺の行列 A にスカラー行列 λI を足す変換を T_λ とする．このとき $\pi\circ T_\lambda(O_F)=mc_\lambda(F)$ が成り立つ．

つまり middle convolution は

1. $\mathcal{F}$ の元を $\mathcal{O}$ に最小サイズで持ち上げ，
2. 右辺を λI でずらし，
3. π で戻す

という手続で得られる．

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{O} & \xrightarrow{T_\lambda} & \mathcal{O}\\ {\scriptstyle\pi|_{\mathcal{O}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi|_{\mathcal{O}}}\\ \mathcal{F} & \xrightarrow[mc_\lambda]{} & \mathcal{F}\end{array}$$

大久保型方程式の右辺の行列をスカラー行列でシフトするのは Euler 変換

$$\Psi(x)\mapsto\int\Psi(t)(x-t)^\lambda\mathrm{d}t$$

で実現される．

もともと π は $\mathcal{GO}$ で定義されていたので，命題 9 と同様の手続により，Fuchs 型ではない方程式に対しても middle convolution の類似が定義できる．

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{GO} & \xrightarrow{T_\lambda} & \mathcal{GO}\\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi}\\ \mathcal{E} & \xrightarrow[\text{“}mc_\lambda\text{”}]{} & \mathcal{E}\end{array}$$

注 10. addition の拡張の仕方は比較的明らかで，

$$E=\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{k=0}^{r_\nu}\frac{A_\nu^{(-k)}}{(x-t_\nu)^{k+1}}\in\mathcal{E}$$

に対して

$$\left(A_\nu^{(-k)}\right) \mapsto \left(A_\nu^{(-k)} + \alpha_\nu^{(-k)} I_m\right)$$

を addition とすればよいと思われる．解の変換としては

$$Y \to \prod_{\nu=1}^{p} \exp\left[-\frac{1}{r_\nu}\frac{\alpha_\nu^{(-r_\nu)}}{(x-t_\nu)^{r_\nu}} - \cdots - \frac{\alpha_\nu^{(-1)}}{x-t_\nu}\right](x-t_\nu)^{\alpha_\nu^{(0)}} Y$$

で実現される．

6　不確定特異点型方程式に対する middle convolution の例

不確定特異点を持つ方程式が与えられたとき，その π による逆像は具体的に計算することができる．この節では，不確定特異点型方程式に対する middle convolution の具体例を 3 つ紹介する．2 つが rigid な方程式，後の 1 つは rigid でない方程式である．ここで Fuchs 型でない方程式が rigid であるということも，Fuchs 型の場合と同様に Riemann scheme から方程式が一意に決まることと定義する．

6.1　Kummer

次のような 1 階の方程式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\rho}{x}\right) y$$

を考える．これは原点を不確定特異点，無限遠を確定特異点とする方程式である．π による逆像の中で最小サイズのもの（大久保化）は

$$\left(x - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\rho \end{pmatrix}\Psi$$

となるので，この右辺を generic な値 λ でシフトした

$$\left(x - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda-\rho \end{pmatrix}\Psi$$

が，mc_λ した system であるが，これは本質的に Kummer の方程式であり（つまり Kummer で原点と無限遠点を入れ換えて gauge を調節したもの），rigid であることも容易に確かめられる．

6.2 ${}_3F_1$ の満たす方程式

超幾何級数 ${}_3F_1$ が形式的に満たす方程式は，つぎのような一般大久保型方程式で与えられる：

$$\left(x-\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right)\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x}=\begin{pmatrix}\lambda_1&\frac{\rho_1\rho_2\rho_3}{\lambda_2 t}&1\\t&0&0\\u&0&\lambda_2\end{pmatrix}\Psi.$$

ここで $u=\lambda_1\lambda_2-\rho_1\rho_2-\rho_2\rho_3-\rho_3\rho_1-\frac{\rho_1\rho_2\rho_3}{\lambda_2}$ である．この system の Riemann scheme は

$$\left\{\begin{matrix}\overbrace{\begin{matrix}x=0\end{matrix}}&x=\infty\\\begin{matrix}0&0\\0&\lambda_2\\t&\lambda_1\end{matrix}&\begin{matrix}\rho_1\\\rho_2\\\rho_3\end{matrix}\end{matrix}\right\}$$

となっている．

これを ρ_3 で middle convolution すると 2 階の方程式

$$\frac{A_1^{(-1)}}{x^2}+\frac{A_1^{(0)}}{x}\in\mathcal{E}$$

が得られる．ここで

$$A_1^{(-1)}=\frac{t}{\rho_1-\rho_2}\begin{pmatrix}\lambda_2+\rho_1&\lambda_2+\rho_2\\-(\lambda_2+\rho_1)&-(\lambda_2+\rho_2)\end{pmatrix},$$

$$A_1^{(0)}=-\begin{pmatrix}\rho_1-\rho_3&0\\0&\rho_2-\rho_3\end{pmatrix},$$

Riemann scheme は

$$\left\{\begin{matrix}\overbrace{\begin{matrix}&x=0&\end{matrix}}&x=\infty\\\begin{matrix}0&\lambda_2+\rho_3\\t&\lambda_1+2\rho_3\end{matrix}&\begin{matrix}\rho_1-\rho_3\\\rho_2-\rho_3\end{matrix}\end{matrix}\right\}$$

となる．

次に addition で $x=0$ での exponent の 1 つを 0 にする（今の場合，$x=0$ において，右側の列から $\lambda_2+\rho_3$ を引く．左側の列はそのまま）と Riemann scheme は

$$\left\{\begin{matrix}\overbrace{\begin{matrix}&x=0&\end{matrix}}&x=\infty\\\begin{matrix}0&0\\t&\lambda_1-\lambda_2+\rho_3\end{matrix}&\begin{matrix}\rho_1+\lambda_2\\\rho_2+\lambda_2\end{matrix}\end{matrix}\right\}$$

となって，さらに $\rho_1+\lambda_2$ で middle convolution すれば 1 階に落ちる．

同様にして，${}_pF_{p-2}$ の満たす方程式も 1 階に落とせる．

6.3 Painlevé IV 型方程式の Bäcklund 変換

middle convolution や addition 自身は rigid でない方程式にも適用することができる．例 8 で扱った方程式はアクセサリーパラメータを 2 つ持つが，この方程式を適当なパラメータで middle convolution することによって Painlevé VI 型方程式の Bäcklund 変換が得られる（[4] 参照）．ここでは，rigid ではない不確定特異点型方程式に対する middle convolution の例として Painlevé IV 型方程式に付随する線型方程式（L_{IV}）：

$$
\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{A_0}{x^3} + \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x}\right) Y,
$$

$$
A_0 = \begin{pmatrix} z+1/2 & -uz \\ (z+1/2)/u & -z \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A_2 = -\begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_0+\alpha_1-1 \end{pmatrix},
$$

を考える．ここで

$$
\begin{aligned}
2(1-\alpha_1)z &= (2\lambda^3\mu + 2\alpha_0\lambda^2 - 2t\lambda - 1)(\lambda\mu+\alpha_0) + \alpha_0 + \alpha_1 - 1, \\
\lambda a_{11} &= -(z+1/2) + \lambda^3\mu + \alpha_0\lambda^2, \quad a_{12} = uz/\lambda, \\
a_{21} &= \frac{\lambda}{uz}\left\{a_{11}(t-a_{11}) - (\alpha_1-1)z - \frac{\alpha_0+\alpha_1-1}{2}\right\}, \\
a_{22} &= t - a_{11}
\end{aligned}
$$

である（λ は Y の第 2 成分を消去して単独高階化したときの方程式の見かけの特異点の位置を表している）．

命題 11. $\pi^{-1}(L_{\mathrm{IV}})$ に属する最小サイズの一般大久保型方程式は一意的に存在し，次で与えられる：

$$
(xI_3 - T_{\mathrm{IV}})\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x} = C_{\mathrm{IV}}\Psi. \tag{6.1}
$$

ここで

$$
T_{\mathrm{IV}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_{\mathrm{IV}} = \begin{pmatrix} 2(\alpha_1-1)z-\alpha_0 & (C_{\mathrm{IV}})_{12} & (C_{\mathrm{IV}})_{13} \\ 0 & -2(\alpha_1-1)z+\alpha_2 & (C_{\mathrm{IV}})_{23} \\ \frac{1}{2} & t & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
&(C_{\mathrm{IV}})_{13} = 4(\alpha_1-1)\lambda\{2\lambda(\lambda\mu+\alpha_0)^2-\mu\}z, \ (C_{\mathrm{IV}})_{23} = -4(\alpha_1-1)\lambda(\lambda\mu+\alpha_0)z, \\
&(C_{\mathrm{IV}})_{12} = \frac{((-2(\alpha_1-1)z+\alpha_2)(C_{\mathrm{IV}})_{13}}{(C_{\mathrm{IV}})_{23}} + 2t(2(\alpha_1-1)z-\alpha_0).
\end{aligned}
$$

これを mc_{α_0} すると 2 階の方程式になって，変換の前後を比べることにより

$$
\begin{gathered}
\alpha_0 \mapsto -\alpha_0, \quad \alpha_1 \mapsto \alpha_1+\alpha_0, \quad \alpha_2 \mapsto \alpha_2+\alpha_0, \\
t \mapsto t, \quad \lambda \mapsto \lambda + \frac{\alpha_0}{\mu}, \quad \mu \mapsto \mu
\end{gathered}
$$

という Painlevé IV 型方程式の Bäcklund 変換が得られる.

ちなみにこのときの大久保化 (6.1) を Laplace 変換したもの

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z} = \left(T_{\mathrm{IV}} - \frac{C_{\mathrm{IV}} + I}{z}\right)\Phi$$

は本質的に $A_2^{(1)}$ 型野海–山田系（つまり P_{IV} の対称形式）に付随する線型方程式である.

参考文献

[1] Dettweiler, M., Reiter, S.: An algorithm of Katz and its application to the inverse Galois problem, *J. Symbolic Computation* **30** (2000) 761–798.

[2] Haraoka, Y.: Canonical forms of differential equations free from accessory parameters, *SIAM J. Math. Anal.* **25**, No.4 (1994) 1203–1226.

[3] 原岡喜重: 超幾何関数 (すうがくの風景 7)，朝倉書店，(2002)

[4] Haraoka, Y., Filipuk, G.: Middle convolution and deformation for Fuchsian systems, *J. Lond. Math. Soc.* **76**, No. 2 (2007) 438–450.

[5] Hamaguchi, S., Haraoka, Y.: Topological theory for Selberg type integral associated with rigid Fuchsian systems, preprint.

[6] Haraoka, Y., Yokoyama, T.: Construction of rigid local systems and integral representations of their sections, *Math. Nachr.* **279** (2006) 255–271.

[7] Harnad, J.: Dual isomonodromic deformations and moment maps to loop algebras, *Commun. Math. Phys.* **166** (1994) 337–365.

[8] Katz, N. M.: Rigid Local Systems, *Princeton Univ. Press*, (1996).

[9] Kawakami, H.: Generalized Okubo systems and the middle convolution, preprint.

[10] Kohno, M.: Global analysis in linear differential equations, *Kluwer Academic Publishers*, (1999).

[11] Mazzocco, M.: Irregular isomonodromic deformations for Garnier systems and Okamoto's canonical transformations, *J. London Math. Soc.(2)* **70** (2004) 405–419.

[12] Okubo, K.: On the group of Fuchsian equations, 都立大学数学教室セミナー報告 (1987).

[13] Oshima, T.: Classification of Fuchsian systems and their connection problem, preprint.

[14] Oshima, T.: Katz's middle convolution and Yokoyama's extending operation, preprint.

[15] Yokoyama, T.: On an irreducibility condition for hypergeometric systems, *Funkcial. Ekvac.* **38**, No. 1 (1995) 11–19.

[16] Yokoyama, T.: Construction of systems of differential equations of Okubo normal form with rigid monodromy, *Math. Nachr.* **279**, No. 3 (2006) 327–348.